DOI:10.13758/j.cnki.tr.1991.03.002

分数维几何学在地学和土壤制图学上的应用*

曾志远　曹锦铎

（中国科学院南京土壤研究所）

摘　要

本文将分数维几何学方法试用于四川省万县附近土地资源图的单位图斑的周长、面积测量值及分数维D的计算。

一、分数维几何学及其地学应用

按照经典的几何学，点是零维的，线是一维的，面是二维的，体是三维的。但是，后来的一些数学家在研究曲线的过程中，开始注意到一些特殊的曲线。1890年，意大利数学家G.皮亚诺(G.Peano)提出了一种类似于中国古建筑中窗棂图案的曲线[1]。后来又陆续提出了Koch雪花曲线、C曲线和类似于环形的曲线。这是一些复杂扭曲的被称为“妖魔”或“病态”的曲线。直到十几年前，法国数学家B.B.芒代尔布罗(B.B.Mandelbrot,1977)才在总结前人工作的基础上，将类似的许多曲线统称为分数维曲线(Fractal curves)，从而创立了一门新的数学学科——分数维几何学(Fractal geometry)[2]。

分数维几何学认为，除了零维、一维、二维、三维等整数维几何形体之外，还存在着它们彼此之间的过渡态几何形体，即具有分数维的几何形体。比如1.2维的曲线和3.5维的曲面等。

分数维曲线的构成都是由一个所谓源多边形的边按照一定的所谓生成线逐级变形而生成的。并且可以无限次地变形，因而曲线可以无限次地延长。但它的极限总是充满一个有限的空间。这个空间的大小、形状和这条曲线的性质就取决于它的源多边形和生成线。例如，Koch雪花曲线的源多边形是正三角形，其生成线是长度等于该正三角形边长的1/3的4个线段连成的一条尖帽形折线；C曲线的源多边形是一条直线，其生成线是夹角为直角、两直角边远端点之间的距离等于源多边形直线的一条折线。

曲线的分数维数D就定义为，该曲线生成线的等长直线段的数目N的对数，与该曲线生成线两端的距离与这些直线段长度之比1/r的对数之比。即：

$$D = \lg N / \lg(1/r) \qquad (1)$$

用此公式可算出Koch雪花曲线的分数维数 $D=1.262$，C曲线的分数维数 $D=2.000$，等等。分数维曲线的分数维数D满足条件：$1<D\leqslant2$。类似地，还有分数维曲面：$2<D\leqslant3$，及分数维三维立体：$3<D\leqslant4$。

* 杨涛协助测量图斑和计算。特此致谢。

分数维几何学能对几何形体进行全面而精确的描述。它能描述线、面、体的复杂性、扭折性和弯曲性。它既能描述最简单的直线，也能描述复杂的、扭曲盘旋的、例如由杂乱无章的布朗运动的轨迹构成的多边形，以至更复杂的几何形体。

分数维几何学问世以来，立即在各门学科，包括在地学和土壤学中，获得了应用。

S.洛弗热瓦(S.Lovejoy，1982)提出了用分数维描述云、雨区几何形状和特征的方法[3]。他分别在卫星遥感图象和雷达遥感图像上确定了云、雨区的界线，并把这些千变万化的边界线看成是分数维曲线。但他无法确定这些曲线是由何种源多边形和何种生成线发展而来。因此他吸取了B.B.芒代尔布罗提出的以面积对周长的关系来研究平面图形结构的建议[2]。他测定了各云区和雨区的周长(分数维曲线长)P及云区和雨区的面积(分数维曲线包围的面积)A。然后将周长P近似地表示为面积A的平方根的D次方。即：

$$P \sim \sqrt{A}^{D} \qquad (2)$$

式中的D被他解释为周长线(边界线)的分数维数。

他还根据云区和雨区的周长P和面积A的数据对，作出了lgA对lgP的回归直线，估计了该直线的斜率和云、雨区总的平均维数D。

根据D值的计算结果，洛弗热瓦讨论了若干与云区和雨区的空间结构和形成机理的有关问题。

R.W.阿诺德(Richard W. Arnold，1990)根据分数维几何学的原理，提出了用分数维测量图斑复杂性的方法[4]。他使用的估计分数维数D的公式是

$$P = A^{0.5D} \qquad (3)$$

或维数 $D = 2\lg P/\lg A \qquad (4)$

式中P为一个图斑的周长，即图斑边界线的长；A为该图斑的面积；D为图斑边界线或周长的分数维数。

因为在面积相等的情况下，图斑的形状越复杂，其周长越长，因而用上式算得的D值越大。所以，D是图斑形状复杂性的一种量度*。

R.W.阿诺德计算了美国纽约州中部托木金斯县境内的两种土壤组合的一些土壤图斑的分数维D，分析了它们的变异。他按不同的土壤组来计算分数维数，以估计各种面积频数分布不同对分数维数的影响。他又按图斑大小分组来计算分数维数，以估计图斑大小对分数维数的影响。

他认为较大的区域能遇到较多的成土因素和成土过程的变化，故图斑越大，界线越复杂，分数维数越大。他还认为，随着地理信息系统的出现和按线段将土壤图数字化的方法的使用，图斑周长和面积数字将作为副产品而易于获得，这将推动分数维计算和研究的发展。

N. 彭道克等(Neil Pendock et al.,1983)使用G. 皮亚诺的方法，对南非皮拉内斯堡的陆地卫星MSS图象进行了增强处理，获得了明显的效果[1]。

A. 彭特兰德(Alex. Pentland,1984)使用分数维理论进行卫星图象的纹理分析**，何刚(1988)提出用分数维曲面的方法提取卫星遥感图象的纹理信息*，均获得了较好的结果。

因为在自然界任何一个产生永久形变的局部作用过程，经过多次重复以后，都会产生一

* R.W. 阿诺德也介绍了P.A. 皮奇(P.A. Piech, 1980)用周长P和面积A估计图斑形状复杂性指数CI的公式。即：$CI = P^2/4\pi A$ (5)

** 何刚：Fractal模型及其在图象纹理辨识和图象分类中的应用。硕士论文，88年8月。

个分数维表面，总分数维在自然界处处可见。如土壤侵蚀、大气湍流、星体聚合等，都是这样的过程* 。

可以说，这方面的研究方兴未艾，是个值得注意的领域。

二、用分数维方法研究四川万县附近土地资源图的尝试

我们选四川万县附近的一块1:5万土地资源图为试验区，来计算和分析图斑的分数维。其面积约1300平方厘米，相当于实地面积约330平方公里。

对试验区中的所有图斑，先测出它们的周长P和面积A。然后用公式(4)来计算它们各自的分数维数。

周长的量度和面积的量度使用相同的单位。而且据我们的经验，选用单位时还须考虑使面积的对数不出现零和负数和使D不小于1。我们认为，一般应取毫米为测量单位。它实际上可以通用于各种比例尺的图。

实验区各土地资源单位85块图斑的周长、面积测量值及分数维数D的部分计算结果见表1。

由表1的资料，我们可以提出下面几个问题作初步的讨论。

(一) 分数维数的几何学特性问题

1．在图斑面积相等的情况下，分数维数相等或相近的图斑，其图斑形状相似或相近;分数维数不等的图斑，分数维数越大，其图斑边界线扭折程度越大，形状越复杂。例如，第11号和第24号图斑，其面积相等(110)，分数维数D也几乎相等(1.664和1.665)。在土地资源图上可以看到两图斑形状十分相似一致。又如第41号和43号图斑，面积也相等(960)，但 $D_{41}=1.521$，$D_{43}=1.710$。在土地资源图上可以看到41号图斑较圆，周长扭折变化较小；43号图斑狭长，周长扭折变化较大。其它如第10号和33号，28号和62号等图斑均是如此。

2．在图斑形状复杂程度比较接近的情况下，图斑边界线的分数维数随着图斑面积的增大而减小。例如，土地资源图上形状较简单但面积差别较大的图斑，如第17、11、28、30、36和44号等，它们的面积分别是60、110、230、420、1430和3500，即面积依次增大，于是它们边界线的分数维数D就依次减小，分别是1.693，1.664、1.617、1.571、1.504和1.470。这是由分数维能反映曲线弯曲程度这个特性决定的。彼此成相似形的图斑，面积小的边界线弯曲程度大，其分数维数大；面积大的边界线弯曲程度小，其分数维数小。这是完全合乎逻辑的。

由以上两种情况看，分数维数D既能反映图斑边界线弯曲的程度，又能反映其边界线扭折变化的程度，即图斑形状变化的程度。

3．我们可以设想从分数维数D中分离出两种成分，即(1)说明单纯面积变化及由它的变化引起的边界线弯曲度变化的成分D_1；(2)说明等面积条件下单纯形状变化或边界线扭折性变化的成分D_2。为此，我们先考虑较单纯的几何图形——圆的周长的分数维D随着面积A增大的规律。由公式(3)可以导出

$$D=\lg(4\pi)/\lg A+1 \tag{6}$$

或

$$D=1.09921/\lg A+1 \tag{7}$$

由上面二式可以看出，当圆的面积为 4π 时；$D=2$;以后圆的面积越大，D值越小;最后D值趋近于1。我们用公式(7)计算出所有图斑的面积A对应的圆的D值，命名为D_1，并列于表1。

* 朱重光：九十年代遥感图象处理方法的发展。“九十年代遥感发展的趋势与前沿”学术讨论会论文，91年4月。

表 1　　万县市附近土地资源图部分图斑测量与分数维数D计算结果

图斑编号	地被和土地利用类型	地被类型代码	图斑周长 P (mm)	图斑面积A (mm^2)	分数维数 $D=\frac{2\lg P}{\lg A}$	单纯面积增大引起的D值变化 D_1	形状复杂和边界扭折引起的D值变化 D_2	图斑复杂性指数 $CI=\frac{P^2}{4\pi A}$
10	低山水田	2c12—1	135	390	1.644	1.424	0.220	3.719
17	高丘水田	2b11	32	60	1.693	1.618	0.075	1.358
23	同　上	1a1	290	760	1.710	1.382	0.328	8.806
30	低山阶石水田	2b8—1	115	420	1.571	1.419	0.152	2.506
32	阶石水田	2b10—1	145	700	1.519	1.286	0.133	2.390
33	低山阶石水田	2a3—1	170	390	1.722	1.424	0.297	5.897
35	同　上	2b8—1	115	510	1.524	1.406	0.118	2.061
40	高丘水田	2b11	175	370	1.753	1.428	0.325	6.587
62	平坝水田	1a1	560	2740	1.599	1.320	0.279	9.108
28	高丘水田	2b11—1	85	230	1.617	1.465	0.152	2.500
11	高丘旱地	3b11—3	50	110	1.664	1.539	0.126	1.809
36	低山旱地	4a1—2	195	1430	1.504	1.348	0.156	2.110
41	高丘旱地	3b11—3	185	960	1.521	1.369	0.152	2.837
44	高丘旱地	3b11—3	400	3500	1.470	1.310	0.159	3.638
22	低丘旱地	3a4—3	490	2100	1.670	1.331	0.339	9.098
24	同　上	3a4—3	50	110	1.665	1.539	0.126	1.809
26	同　上	3a4—3	400	1140	1.702	1.360	0.343	11.169
66	同　上	3a4—3	1050	4020	1.676	1.305	0.371	21.824
34	灌草地	4a1—3	315	1280	1.608	1.354	0.251	6.169
60		3a4—3	125	360	1.641	1.430	0.211	3.454
77		4c19—4	85	360	1.510	1.430	0.080	1.597
38	需退耕旱地	R4a1—3	540	2480	1.610	1.324	0.286	9.357
43		R3b11—3	355	960	1.710	1.369	0.342	10.417
75		R_4a_1—3	990	6070	1.584	1.291	0.293	12.849
70	城镇	8_1	305	1380	1.582	1.350	0.232	5.364
83		8_1	180	670	1.596	1.389	0.207	3.848
84		8_1	195	430	1.739	1.417	0.322	7.037
52	小河	8_2	168	140	2.074	1.512	—	16.043
53		8_2	138	100	2.140	1.550	—	15.155
71		8_2	415	300	2.111	1.444	—	15.684

这个值反映纯粹的或理论的圆图斑面积变化时，边界线弯曲度的变化。

我们又从实际图斑量算的D减去纯粹面积变化引起的边界线弯曲度变化因子值D_1，便得到说明图斑面积不变时形状变化程度或边界线扭折程度的因子值D_2，即：

$$D_2 = D - D_1 \qquad (8)$$

凡是D_2值很小的一些图斑，如第11、17、24、30、32和35号图斑，其图斑形状都比较简单，边界线旋回折转程度较小；而D_2值较高的一些图斑，如第22、23、26、40、43和66号图斑，其图斑形状都比较复杂，边界线旋回折转程度较大。

我们把按公式(5)算出的图斑复杂性指数CI也列于表1。CI也可说明图斑形状变化的复杂性。但它不能说明形状相似或相同时单纯面积变化引起的图斑边界线弯曲程度的变化。

（二） 分数维的地学含义问题

1. 一个地方土地资源图图斑总的分数维数的高低，反映出该地土壤和景观的复杂程度。总的分数维数高的地区，复杂程度高。该地所有图斑分数维数的平均值可作为该地土壤和景观复杂性的一种量度。例如，本试验区D的平均值为1.617，说明本区土壤和景观较为复杂。这是一种最简单的估计。

2. 一个地方土壤和景观复杂程度的更精确估计，可以对该区所有图斑求分数维D对图斑面积A或面积的对数lg A的回归方程和回归曲线来实现。由于在图斑为圆形的理想条件下，图斑的分数维D与面积A的关系遵从关系式(6)，故可以设想，任何一地实际图斑的分数维数D与面积A的回归方程也应具有如关系式(6)的形式，只是具体系数不同，即

$$D = a/\lg A + b \qquad (9)$$

由于形如式(9)的曲线是一条D值趋向于b的渐近线，故b可视为该区最小D值的理论极限估计。它应该总是大于1。由于最简单的图形圆的D～lgA关系式中b=1〔式(6)〕，故可将一个地区D～lgA关系的回归估计值b与1相比较。b值越大，该地的土壤和景观复杂程度越高。

对我们的试验区，可得到回归方程（3个D值大于2的图斑未计在内）：

$$D = 0.58563/\lg A + 1.4022 \quad (r = 0.521^{**},\ n = 82) \qquad (10)$$

b=1.4022，可作为本区土壤和景观复杂性的一种定量指标。若计算和比较了许多地区的b值，就可定量地评价它们土壤和景观复杂程度的大小。

3. 式(9)中的系数a可说明一个地区土壤和景观结构的内在特性。因为它可反映本地区图斑的基本结构形式——接近于某种基本几何图形。如平行岭谷区地貌图的基本图斑可接近于某种平行四边形，三角洲河网图的基本图斑可接近于某种三角形，大规模平原垦区的田块图可接近于某种矩形，等等。

为了直观说明这一点，我们推导了某些基本几何图形的周长线的D值与其面积A的关系式：

(1) 圆：$D = 1.09921/\lg A + 1$；(2) 长短轴之比为2:1的椭圆：$D = 1.17485/\lg A + 1$；(3) 正方形：$D = 1.20412/\lg A + 1$；(4) 长宽比为2:1的矩形：$D = 1.25527/\lg A + 1$；(5) 正三角形：$D = 1.31774/\lg A + 1$；(6) 长短边之比为2:1、锐角为45°的平行四边形：$D = 1.40579/\lg A + 1$。

因为这些公式中b值都等于1，只有a值不同，故可认为只有a值反映基本几何图形的特性。亦即a值是反映一个地区图斑基本结构形式的指标，即反映该地区土壤和景观内在特性的指标。一个地区的图斑基本结构是该地区基本地理因素和过程（包括成土因素和过程）作

用的结果。如平行岭谷、三角洲、农垦条田等，都各有其决定因素和形成过程。故 a 值是说明地理因素和过程的一个重要定量指标。

式(10)中的 a 值为0.58563，它并不与前述的几种基本几何图形的 a 值接近。这是因为其 b 值并不等于 1 的缘故。但如果我们将（10）式纳入 $D=a/\lg A+1$ 的基本结构式并使其 D 的平均值1.6169保持不变，那么就可得到本区 D～lgA 关系的基本结构式。可以算得其 a 为1.67518。它接近于边长比为 $8:\sqrt{2}$ 的平行四边形的D～lgA关系式（可以导出）$D=1.64654/\lg A+1$ 中的 a 值。这说明本区图斑的基本结构形式接近于窄长的平行四边形。这与本区特定的地理因素与过程造成的平行岭谷地貌及有关土壤、景观特性相一致。

4. 形如式(7)的回归方程的回归系数 r，是一个地区图斑形状和基本结构，也是土壤或景观外部形状和内部特性区内变异程度的反映。 r 值越小，区内变异程度越大。本区的 $r=0.521$，说明其区内变异较大。此 r 值的置信水平较高，方程是可信的。

5. 本区不同的土地资源类型间的分数维数差别不明显。需进一步研究。各小河的D值都很高并接近于 2。这是可以理解的。S.洛夫热瓦曾指出，细长弯曲图形的D应趋近于2[3]。但D值比 2 略大是不合理的。R.阿诺德把这种情况归因于测量误差[4]。但是，也可能与D值的计算公式为近似估计有关。

参 考 文 献

[1] Neik Pendock et al., Reducing the spectral dimension of remotely sensed data and the effect on information content. The proceedings of the seventhinternational symposium onrc remote sesing of environment, Ann Arboi, Michigan, May 9-13, pp 1213-1222, 1983.

[2] B. B. Mandelbrot, Fractals, Freeman, San Francisco, 1977.

[3] S. Lovejoy, Science, Vol. 216, No. 4542, pp 185-187, 1982.

[4] Richard W. Arnold, Fractal demensions of some Soil map units 第十四回国际土壤科学会议 Transactions, Vol. V, pp 92-97, Kyoto, Japan, 1990.