DOI: 10.13758/j.cnki.tr.2025.01.020 CSTR: 32214.14.tr202403060102
高照, 景元书, 高晨, 等. 土壤压实曲线参数模型的对比研究. 土壤, 2025, 57(1): 179–186.

土壤压实曲线参数模型的对比研究①

高 照[1,4], 景元书[1], 高 晨[2,3], 蒋一飞[2,3], 贾仁浩[2,3], 刘正国[1,4], 张子杰[2,4], 李晓鹏[2,4], 刘建立[2,4*]

(1 南京信息工程大学生态与应用气象学院, 南京 210044; 2 中国科学院南京土壤研究所, 南京 211135; 3 中国科学院大学, 北京 100049; 4 中国科学院大学南京学院, 南京 211135)

摘 要: 为验证经验性土壤压实曲线参数模型的适用性, 本文利用典型东北黑土的原状土和填装土室内单轴压缩试验数据, 对比分析了 10 种土壤压实曲线参数模型的应用效果。结果表明, Fredlund-Xing、Logistic、Kosugi、Gompertz 模型均能很好地拟合荷载压力-土壤孔隙比数据, 其 R^2 均大于 0.998, RMSE 均小于 0.004, 可用于拟合土壤压实曲线。其中 5 参数的 Fredlund-Xing 模型效果最佳, R^2>0.998, RMSE<0.003, 推荐在实际研究中使用。研究结果可为土壤压实过程定量模拟和压实风险评估提供参考依据。

关键词: 土壤; 压实曲线; 参数模型; 模型评价

中图分类号: S152.5; S152.9 **文献标志码:** A

Comparative Study of Soil Compaction Curve Parameter Models

GAO Zhao[1, 4], JING Yuanshu[1], GAO Chen[2, 3], JIANG Yifei[2, 3], JIA Renhao[2, 3], LIU Zhengguo[1, 4], ZHANG Zijie[2, 4], LI Xiaopeng[2, 4], LIU Jianli[2, 4*]

(1 *School of Ecology and Applied Meteorology*, *Nanjing University of Information Science and Technology*, *Nanjing* 210044, *China*; 2 *Institute of Soil Science*, *Chinese Academy of Sciences*, *Nanjing* 211135, *China*; 3 *University of Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100049, *China*; 4 *University of Chinese Academy of Sciences*, *Nanjing*, *Nanjing* 211135, *China*)

Abstract: In order to verify the applicability of the empirical soil compaction curve parameter model, the application effects of 10 soil compaction curve parameter models were compared and analyzed by using the indoor uniaxial compression test data of undisturbed soil and disturbed soil of typical black soil in Northeast China. The results showed that the Fredlund-Xing, Logistic, Kosugi and Gompertz models could fit the load pressure-soil void ratio data well, and their R^2 were greater than 0.998 and RMSE were less than 0.004, which could be used to fit the soil compaction curve. Among them, the 5-parameter Fredlund-Xing model had the best effect, with R^2>0.998 and RMSE<0.003. It is recommended for use in practical research. The results of this study can provide a reference for the quantitative simulation of soil compaction process and compaction risk assessment.

Key words: Soil; Compaction curves; Parametric model; Model evaluation

土壤压实是因施加载重、振动或压力使土壤颗粒重新排列, 从而导致土壤孔隙度降低、容重增加的过程, 主要是由于农业机械进行田间作业时, 对土壤表面施加的外力作用造成的[1]。压实会导致土壤结构和物理性状退化、水分渗透能力下降、作物根系生长和吸收养分受阻, 从而影响耕地粮食产能[2-3]。

土壤压实的程度可采用容重、孔隙度、土壤强度等土壤物理性质来表征[1], 也可通过室内实验测定土壤压实曲线(即荷载压力和土壤孔隙比之间的关系), 然后用手工作图法或者参数模型拟合实 测曲线[4], 计算压缩指数、回弹指数、预固结压力等土壤压实特征参数[5-6], 来定量评估土壤的抗压能力、恢复能力和承压极限, 指导制定土壤压实的缓解和预防措施等[7-9]。

由于目前仍缺少具有明确物理意义的土壤压实曲线数学模型, 土壤学和土力学研究者基于土壤单轴压缩试验[10]数据, 提出了多种描述土壤压实曲线的经验模型。如 Arvidsson 和 Keller[11]用四次多项式分

①基金项目: 黑土地保护与利用科技创新工程专项(XDA28010401)和国家重点研发计划项目(2023YFD1500304)资助。

* 通信作者(jlliu@issas.ac.cn)

作者简介: 高照(1995—), 男, 江苏徐州人, 硕士研究生, 主要从事农业土壤压实研究。E-mail: gaozhao221@mails.ucas.ac.cn

析了 18 种瑞典农田土壤样品的单轴压缩试验数据。Baumgartl 和 Köck [12]提出用 van Genuchten 土壤水分特征曲线模型(VG)描述土壤固结过程中的孔隙比变化，并计算了 10 种土壤的预固结应力，结果表明 VG 方程可以高精度地模拟样品的体积变化，并可从该方程的导数中推出预固结压力等土壤压实参数。Gregory 等[13]采用四次多项式、Logistic 方程和 Gompertz 方程拟合英国农场土壤的单轴压缩试验数据，均取得了较好的拟合效果，其中 Gompertz 方程效果最佳。霍连飞等[14]采用 Gompertz 函数拟合了不同含水率和容重下的水稻土压实曲线，效果令人满意。郎林智等[15]采用高斯模型拟合土壤压实曲线，表明 Gauss1 模型、Gauss2 模型拟合程度高，其中的 Gauss1 模型确定的预固结应力与土工试验方法现行规范较吻合。

采用参数模型拟合实测土壤压实曲线数据、计算土壤压实参数，避免了经典的手绘作图法中人为因素的干扰，得出的结果更加客观可靠。但是在农田土壤的试验数据处理中，选择何种形式的参数模型仍需进一步分析讨论。特别是这些经验性的参数模型的适用性尚未经过系统和全面的验证，在很大程度上制约了土壤压实过程仿真模型的应用。本文基于室内单轴压缩试验数据，将 Brooks-Corey、Kosugi、Fredlund-Xing 等水分特征曲线模型引入土壤压实曲线研究，通过与来自文献的多种模型对比分析，试图找到适用性广、实用性强的土壤压实曲线参数模型，为农田土壤压实过程的定量化研究提供参考依据。

1 材料与方法

1.1 土壤压实曲线参数模型

本文共选择 10 种经验性的参数模型，包括 Brooks-Corey、Kosugi、van Genuchten、Fredlund-Xing 4 种土壤水分特征曲线方程，Logistic 方程、Gompertz 方程 2 种 S 型生长曲线模型，三次多项式、四次多项式函数，以及 Gauss 模型、Harris 模型等。各模型的表达式如表 1 所示。

表 1 研究采用的 10 个土壤压实曲线参数模型

Table 1 Ten parameter models of soil compaction curves used in this study

序号	模型名称	模型表达式	文献来源
1	Brooks-Corey	$e=e_r+(e_0-e_r)(a\cdot h)^{-b}$	Brooks 和 Corey[16]
2	Kosugi	$e=e_r+(e_0-e_r)\Phi\left(\frac{\log(h/a)}{b}\right)$	Kosugi[17]
3	van Genuchten	$e=e_r+(e_0-e_r)\left(1+(ah)^b\right)^{\left(-1+\frac{1}{b}\right)}$	van Genuchten[18]
4	Fredlund-Xing	$e=e_r+(e_0-e_r)\left(\log\left(e+\left(\frac{h}{a}\right)^b\right)\right)^{(-c)}$	Fredlund 和 Xing[19]
5	Logistic	$e=a+c/\{1+\exp[b(\lg h-d)]\}$	Richards[20]；Gregory 等[13]
6	Gompertz	$e=a+c\cdot\exp\{-\exp[b\cdot(\lg h-d)]\}$	Gregory 等[13]
7	三次多项式	$e=a\cdot(\lg h)^3+b\cdot(\lg h)^2+c\cdot\lg h+d$	张书宪[21]
8	四次多项式	$e=a\cdot(\lg h)^4+b\cdot(\lg h)^3+c\cdot(\lg h)^2+d\cdot\lg h+g$	姬宏和宋新江[22]
9	Gauss	$e=a\cdot\exp\left[-\left(\frac{\lg h-b}{c}\right)^2\right]$	郎林智等[15]
10	Harris	$e=\frac{1}{a+b\cdot(\lg h)^c}$	王志亮等[23]

注：式中 e 为土壤孔隙比；h 为荷载压力(kPa)；e_0 为初始孔隙比；e_r 为残余孔隙比；a、b、c、d、g 为模型的形状参数，均需通过拟合实测土壤压实曲线数据确定。

1.2 土壤样品采集

本研究采用的土壤样品来自黑龙江省海伦市胜利村(126°79'E，47°43'N)。研究区土壤平均黏粒含量 361.9 g/kg，粉粒含量 525.8 g/kg，砂粒含量 112.3 g/kg，质地类型为粉砂质黏壤土(美国制)。采样时间为 2023 年 5 月。为探索轮式农机进地作业导致土壤压实，布置了拖拉机压实次数田间试验(东方红拖拉机 LX1304，无负载自重 5 030 kg，车速匀速 0.56 m/s)，

设置了拖拉机压实 1、3、5、7、9 次共 5 种处理。压实次数试验结束后，在 5 个压实处理和未压实对照 CK 处理的 0 ~ 5、5 ~ 15、15 ~ 25、25 ~ 40 cm 土层均采集 60 cm^3 环刀样，3 次重复(重复样本取平均值进行后续结果分析)，共 24 个原状土样本。同时，从未压实处理区采集土样，磨土风干后在实验室内填装 60 cm^3 环刀，设置不同初始容重、含水量以模拟不同土壤条件。初始容重设置 4 个水平，分别为 1.00、1.10、1.20 和 1.30 g/cm^3；含水量设置 7 个水平，分别为 0.15、0.20、0.25、0.30、0.35、0.40 和 0.50 g/g。含水量和初始容重完全排列组合，3 次重复，重复样本取平均值，共 28 个填装土样本。

1.3　室内单轴压缩试验

室内单轴固结压缩试验使用 GZQ-1 型全自动气压固结仪，按照试验步骤逐级加载压力，压力级别为 12.5、25、50、100、200、300、400、600、800、1 000、1 200 和 1 600 kPa 共 12 级，根据 GB/T 50123—2019《土工试验方法标准》[24]计算不同压力状态下的土壤孔隙比、含水量、压缩指数和回弹指数等。

1.4　压实曲线参数模型评价

利用 Python 自行编制了土壤压实曲线模型计算程序，可利用单轴压缩试验获得的荷载压力–土壤孔隙比数据，用非线性最小二乘法优化拟合土壤压实曲线参数模型，获得最优拟合参数，计算土壤压缩指数、回弹指数、预固结压力等压实特征参数。为评价不同模型的拟合效果，采用 3 种统计指标来进行评价，即赤池信息量准则 AIC(Akaike information criterion)、决定系数(R^2)、均方根误差(RMSE)。AIC 引入拟合参数的数量，对拟合参数过多的模型进行惩罚，可用于评价模型的相对优劣，AIC 值越小表明模拟结果越好[25]。

$$\mathrm{AIC} = -2\ln(\text{模型的极大似然函数}) + 2(\text{模型的独立参数个数}) \quad (1)$$

对 10 个土壤压实曲线参数模型的数值预试验表明，三次多项式、四次多项式、Gauss 模型在拟合填装土和原状土实测荷载–孔隙比数据时，虽然拟合效果总体较好(四次多项式在 10 个模型中表现最好，其 AIC、RMSE 最小，R^2 最大)，但在压实曲线的起始段(0 ~ 10 kPa)和结尾段(10^4 ~ 10^6 kPa)出现过度拟合现象，曲线形态偏离了实测值(图 1)，没有实际物理意义，因此在后续结果分析中将这 3 个模型剔除，仅讨论其他 7 个模型的计算结果。

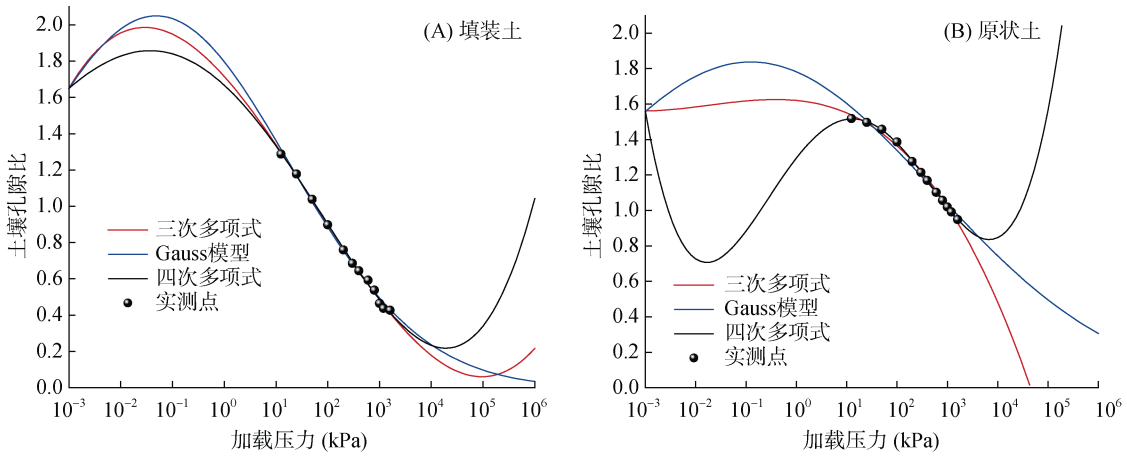

图 1　填装土和原状土压实曲线 3 个模型拟合值和实测值的对比

Fig. 1　Comparison of soil compaction curves measured and fitted of disturbed and undisturbed soils

2　结果与分析

2.1　填装土计算结果

表 2 为 7 个土壤压实曲线参数模型计算的填装土平均 AIC、R^2 和 RMSE。从表中可知，7 个模型的拟合效果总体上均令人满意，R^2>0.98，RMSE<0.012。具体来看，Fredlund-Xing 模型的拟合效果最优，其 AIC 最小(–113.055 7)，R^2 最大(0.998 8)，RMSE 最低(0.002 8)。随后按照精度由高至低依次为 Logistic、Kosugi、Gompertz、van Genuchten、Harris 和 Brooks-Corey 模型。Brooks-Corey 模型的效果最差，AIC = –76.646 5，R^2 = 0.982 7，RMSE = 0.011 3，明显比其他 6 种模型差。其原因在于，Brooks-Corey 模型为不连续的分段函数，拟合曲线从初始压力到 10^2 kPa 时的孔隙比为常数，与实际压实过程不符(图 2)。

由表 2 和图 3 可见，Fredlund-Xing、Logistic、Kosugi 和 Gompertz 4 个模型的拟合效果相近，实测

表 2 填装土土样 7 个土壤压实曲线参数模型的误差统计(n=28)

Table 2 Error statistics of seven soil compaction curve parameter models of filled soil samples

模型名称	AIC	R^2	RMSE
Fredlund-Xing	–113.055 7 ± 13.704 3	0.998 8 ± 0.001 2	0.002 8 ± 0.001 5
Logistic	–112.618 1 ± 15.021 8	0.998 6 ± 0.001 5	0.003 1 ± 0.001 7
Kosugi	–111.546 0 ± 14.951 1	0.998 4 ± 0.001 6	0.003 5 ± 0.001 8
Gompertz	–107.177 6 ± 14.929 9	0.998 0 ± 0.001 6	0.003 8 ± 0.001 8
van Genuchten	–100.682 5 ± 15.719 7	0.996 1 ± 0.003 6	0.005 0 ± 0.002 8
Harris	–98.329 5 ± 18.773 4	0.994 2 ± 0.005 5	0.006 3 ± 0.004 0
Brooks-Corey	–76.646 5 ± 8.469 1	0.982 7 ± 0.010 0	0.011 3 ± 0.003 8

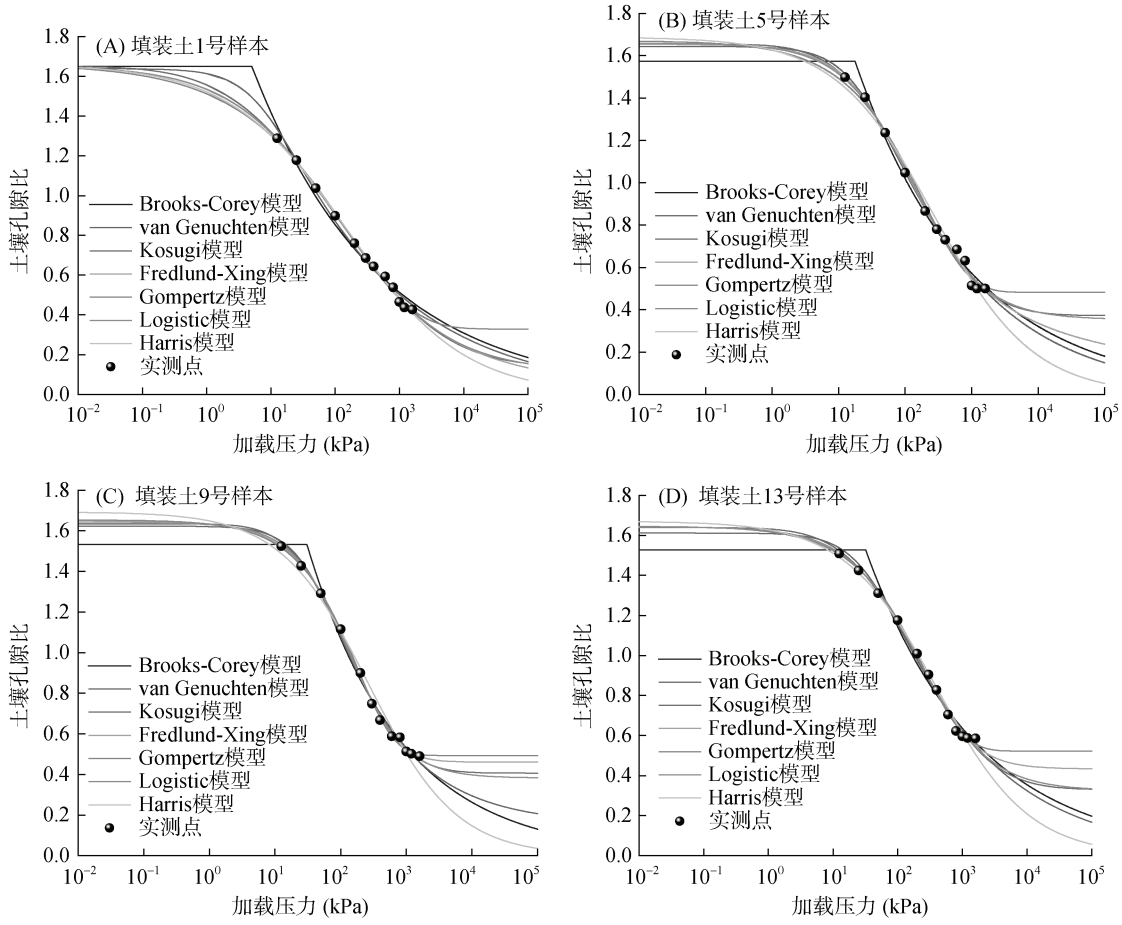

图 2 填装土随机 4 个样本实测和拟合压实曲线对比

Fig. 2 Comparison of soil compaction curves measured and fitted of 4 disturbed samples

和拟合孔隙比间的 R^2>0.998、RMSE<0.004、AIC<–107，明显优于 van Genuchten 模型和 Harris 模型(表 2)；4 个模型拟合孔隙比与实测孔隙比接近(图 3)。从曲线形态来看，4 个模型的拟合曲线在低荷载压力的弹性形变段(0 ~ 10^2 kPa)以及压缩曲线接近直线的塑性形变段(10^2 ~ 10^3 kPa)基本一致，区别主要体现在高荷载压力段(>10^3 kPa)。其中，Gompertz 模型倾向于较早达到压实曲线的渐近值；Logistic 模型与 Kosugi 对数正态分布模型的拟合曲线几乎重叠；包含 5 个形状参数的 Fredlund-Xing 模型则表现出更高的灵活性和拟合精度。

2.2 原状土计算结果

表 3 为原状土样本 7 个土壤压实曲线模型计算的平均 AIC、R^2 和 RMSE。可以看出，7 个模型的拟合效果总体上均较好(R^2>0.98，RMSE<0.007)，各模型的相对优劣次序与填装土一致，从优至劣依次为

Fredlund-Xing、Logistic、Kosugi、Gompertz、van Genuchten、Harris、Brooks-Corey 模型。其中，Fredlund-Xing 模型表现最优，AIC = –138.314 1，R^2 = 0.999 7，RMSE = 0.001 0。Brooks-Corey 模型仍表现不佳，预测效果显著劣于其他 6 个模型。在其他 5 个模型中，Logistic 模型的拟合精度非常接近 Fredlund-Xing 模型(AIC= –137.783 3，R^2= 0.999 6，RMSE= 0.001 1)；Kosugi、Gompertz、van Genuchten 3 个模型的评价指标接近(AIC<–126.00，R^2>0.999 0，RMSE<0.001 6)，略差于 Fredlund-Xing 模型和 Logistic 模型；Harris 模型仅包含 3 个形状参数，拟合效果劣于除 Brooks-Corey 外的其他模型。

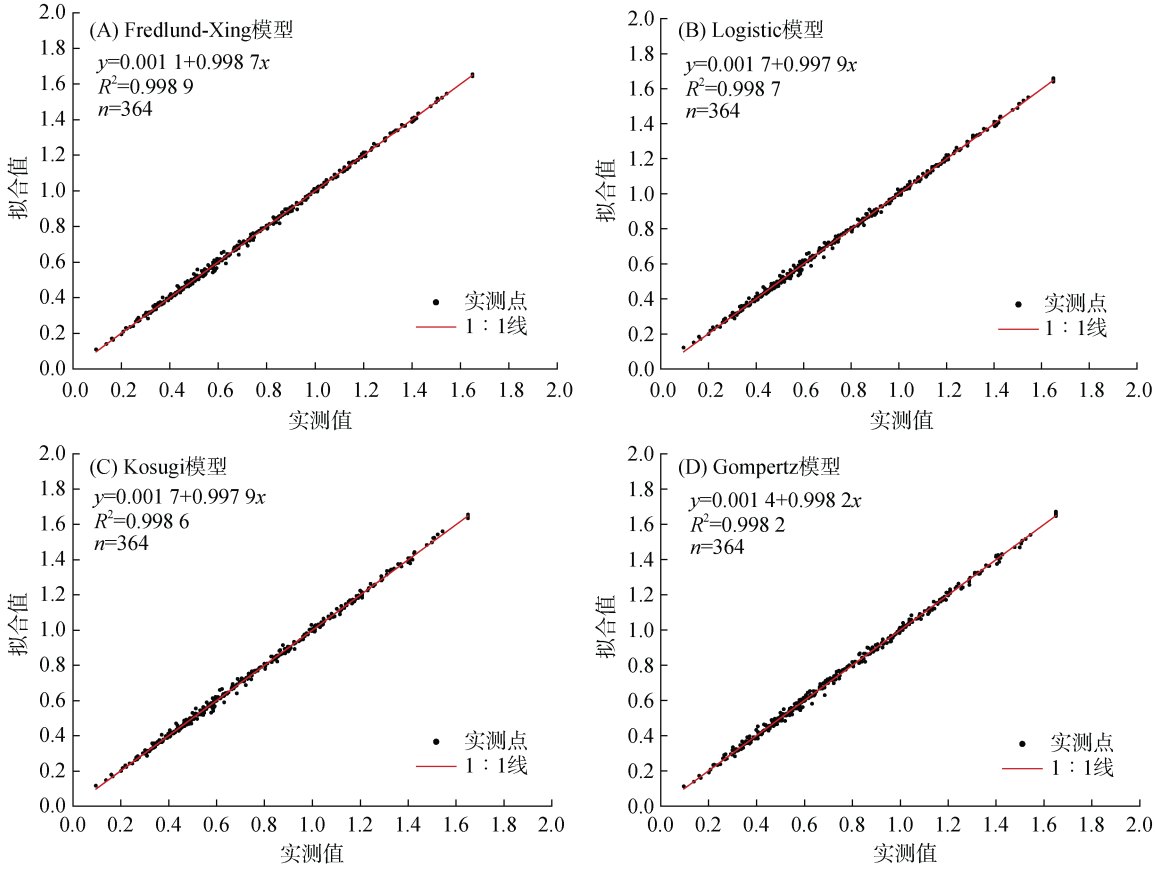

图 3　四个最优模型拟合与实测土壤孔隙比的对比(填装土)

Fig. 3　Comparison of void ratios measured and fitted by four optimal models (disturbed soils)

表 3　原状土土样 7 个土壤压实曲线参数模型的误差统计(*n*=24)

Table 3　Error statistics of seven soil compaction curve parameter models of undisturbed soil samples

模型名称	AIC	R^2	RMSE
Fredlund-Xing	–138.314 1 ± 9.010 7	0.999 7 ± 0.000 2	0.001 0 ± 0.000 3
Logistic	–137.783 3 ± 9.918 7	0.999 6 ± 0.000 2	0.001 1 ± 0.000 4
Kosugi	–131.763 6 ± 6.435 0	0.999 4 ± 0.000 3	0.001 3 ± 0.000 3
Gompertz	–130.578 0 ± 13.790 0	0.999 2 ± 0.000 5	0.001 5 ± 0.000 7
van Genuchten	–126.535 1 ± 7.756 3	0.999 0 ± 0.000 9	0.001 6 ± 0.000 5
Harris	–104.684 9 ± 10.355 0	0.994 4 ± 0.003 1	0.004 2 ± 0.001 6
Brooks-Corey	–91.344 7 ± 2.761 4	0.987 9 ± 0.004 0	0.006 1 ± 0.000 7

分析 Fredlund-Xing、Logistic、Kosugi、Gompertz 等拟合效果较好的模型曲线形态(图 4)可知，与填装土结果类似，4 个模型的拟合曲线在弹性形变段(0 ~ 10^2 kPa)、塑性形变段(10^2 ~ 10^3 kPa)基本重叠，区别主要在高荷载压力段(>10^3 kPa)。4 个模型的拟合孔隙比接近实测孔隙比(图 5)。其中，Gompertz 模型仍倾向于较早达到压实曲线的渐近值；Fredlund-Xing 模型与 Logistic 模型的拟合结果几乎完全一致，其高压力段(>10^3 kPa)的拟合曲线基本位于 Gompertz 模型和 Kosugi 模型结果之间。

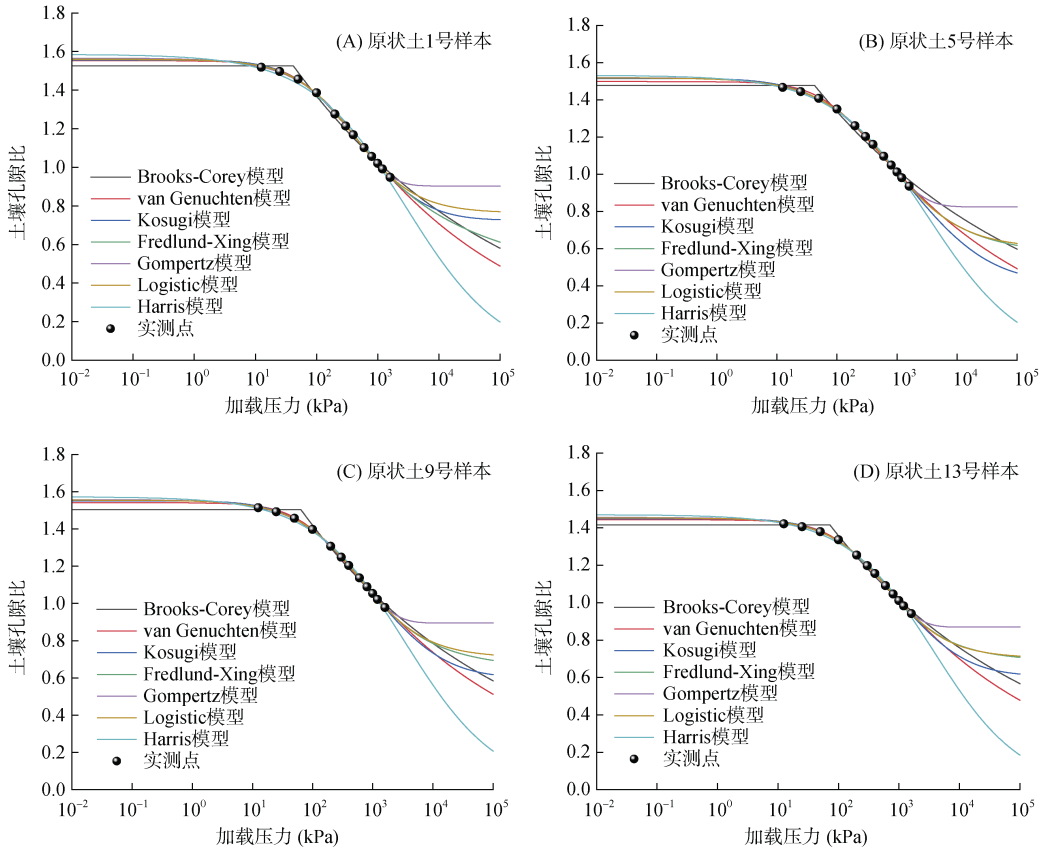

图 4　原状土随机选取的 4 个样本实测和拟合曲线对比

Fig. 4　Comparison of soil compaction curves measured and fitted of 4 undisturbed samples

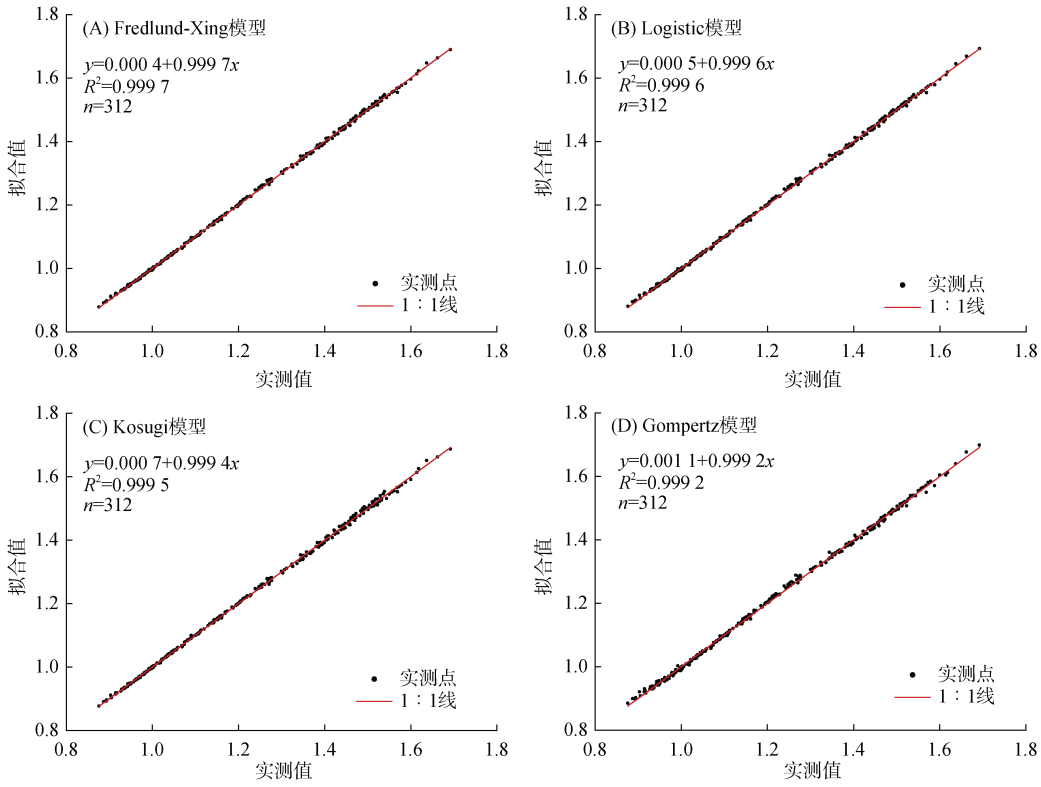

图 5　四个最优模型拟合与实测土壤孔隙比的对比(原状土)

Fig. 5　Comparison of void ratios measured and fitted by four optimal models (undisturbed soils)

3　讨论

从填装土和原状土的拟合效果来看，7 个模型总体均较好，即使是拟合效果相对较差的 Harris 模型，其在填装土和原状土上的 R^2 也均大于 0.99。但对比表 2 和表 3 发现，无论是 AIC、R^2 或 RMSE，同一模型在原状土上的拟合效果均略优于填装土。如 Fredlund-Xing 模型在原状土的 AIC = –138.314 1、R^2 = 0.999 7、RMSE=0.001 0，而在填装土的 AIC = –113.055 7、R^2 = 0.998 8、RMSE = 0.002 8；Logistic 模型在原状土的 AIC = –137.783 3、R^2 = 0.999 6、RMSE = 0.001 1，而在填装土的 AIC = –112.618 1、R^2 = 0.998 6、RMSE = 0.003 1。分析其原因，可能是因为填装土是经过人工过筛、研磨和填装，土壤颗粒在田间的自然排列分布状态被扰动，试验中无法反映田间状态下的土壤结构和应力历史；其次，为达到试验目的，人为设置了样品不同的初始容重和含水率，进一步改变了土壤的孔隙结构和水分状态；此外，在室内单轴压缩试验中，随加载压力的增大，填装土的孔隙比变化区间(0.109 7 ~ 1.670 6)远大于经过轮胎碾压的原状土(0.877 9 ~ 1.699 1)，填装土的实测压实曲线点间也更加离散(图 2、图 4)，这在一定程度上也降低了模型最优化求解时的精度。

本文探讨的 7 个土壤压实曲线参数模型均为非线性的经验函数，需要利用最优化算法和室内试验数据序列来确定函数中形状参数取值。7 个模型中，除 Harris 模型为 3 个参数，Fredlund-Xing 模型为 5 个参数外，其余 5 个模型均包含 4 个形状参数。一般来说，模型中的参数个数越多，拟合实测值的精度越高，但在最优化求解时需要的实测点数量也会越多，从而会影响模型的实用性。在具体应用中，可根据实测压实曲线数据的多少来选用不同参数个数的模型，实测数据多于 5 个时，可选择精度最高的 Fredlund-Xing 模型；实测数据少于或等于 4 个时，可选择 3 参数的 Harris 模型；其他情况下，则可选择 Logistic、Kosugi 或 Gompertz 等 4 参数模型。需要指出的是，Logistic 模型的拟合效果仅次于 Fredlund-Xing 模型，但从严格的数学意义上讲，其曲线前半段和后半段是以曲线拐点为中心对称分布的[13]，而实际的土壤压实曲线并不一定是对称分布的，在实际应用中需注意。

4　结论

本研究利用黑龙江海伦典型黑土 28 个填装样品、24 个原装样品的室内单轴压缩试验数据，分析评价了 10 种经验性土壤压实曲线参数模型的拟合效果。Fredlund-Xing、Logistic、Kosugi、Gompertz 等 4 个模型对土壤孔隙比的拟合效果良好，R^2 均大于 0.998，RMSE 均小于 0.004，适用于填装土和原状土压实曲线的定量描述。其中 5 参数的 Fredlund-Xing 模型效果最好，其 R^2>0.998，RMSE<0.003，推荐在实际研究中使用。而三次多项式、四次多项式、Gauss 模型和 Brooks-Corey 模型拟合结果偏离了实际土壤压实曲线形态，不建议使用。

参考文献：

[1] 高晨, 李晓鹏, 刘毅仁, 等. 农田土壤压实过程及模型研究进展[J]. 土壤, 2024, 56(1): 1–9.

[2] 任利东, 王丽, 林琳, 等. 农田土壤机械压实研究进展与展望[J]. 土壤学报, 2023, 60(3): 610–626.

[3] 孙奥博, 安晶, 虞娜, 等. 铁矿尾砂配施有机物料对褐土压缩及回弹特性的影响[J]. 土壤, 2022, 54(6): 1300–1306.

[4] 林琳, 韩少杰, 王恩姮. 有机质与黏粒含量对黑土压缩–回弹特性的影响[J]. 土壤学报, 2016, 53(5): 1138–1147.

[5] Zolfaghari Z, Mosaddeghi M R, Ayoubi S. Relationships of soil shrinkage parameters and indices with intrinsic soil properties and environmental variables in calcareous soils[J]. Geoderma, 2016, 277: 23–34.

[6] Lin L, De Pue J, Vivanco A K M, et al. Visual assessment of soil structural quality across soil textures and compaction levels–part I: Examination of intact soil cores[J]. Geoderma, 2022, 426: 116099.

[7] Bayat H, Sheklabadi M, Moradhaseli M, et al. Grazing management, slope aspect and canopy effects on the compression characteristic of soils of the Gonbad experimental watershed in Hamedan, Iran[J]. Geoderma, 2022, 409: 115641.

[8] Saha A, Nath A, Dey A K. Multivariate geophysical index-based prediction of the compression index of fine-grained soil through nonlinear regression[J]. Journal of Applied Geophysics, 2022, 204: 104706.

[9] Yang P P, Dong W X, Heinen M, et al. Soil compaction prevention, amelioration and alleviation measures are effective in mechanized and smallholder agriculture: A meta-analysis[J]. Land, 2022, 11(5): 645.

[10] Sánchez-Girón V, Andreu E, Hernanz J L. Response of five types of soil to simulated compaction in the form of confined uniaxial compression tests[J]. Soil and Tillage Research, 1998, 48(1/2): 37–50.

[11] Arvidsson J, Keller T. Soil precompression stress I. A survey of Swedish arable soils[J]. Soil and Tillage Research, 2004, 77(1): 85–95.

[12] Baumgartl T, Köck B. Modeling volume change and mechanical properties with hydraulic models[J]. Soil

Science Society of America Journal, 2004, 68(1): 57–65.

[13] Gregory A S, Whalley W R, Watts C W, et al. Calculation of the compression index and precompression stress from soil compression test data[J]. Soil and Tillage Research, 2006, 89(1): 45–57.

[14] 霍连飞, Belal E A, 丁启朔, 等. 采用Gompertz函数的水稻土压缩特性研究[J]. 农业工程学报, 2020, 36(12): 136–142.

[15] 郎林智, 陈鹏宇, 聂良佐, 等. 基于Gaussian模型的先期固结压力确定[J]. 水电能源科学, 2011, 29(7): 47–49, 194.

[16] Brooks R H, Corey A T. Hydraulic properties of porous media[D]. Colorado: Colorado State University, 1965.

[17] Kosugi K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties[J]. Water Resources Research, 1996, 32(9): 2697–2703.

[18] van Genuchten M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. Soil Science Society of America Journal, 1980, 44(5): 892–898.

[19] Fredlund D G, Xing A Q. Equations for the soil-water characteristic curve[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1994, 31(4): 521–532.

[20] Richards L A. Capillary conduction of liquids through porous mediums[J]. 1931, 1(5): 318–333.

[21] 张书宪. 用计算机绘图确定先期固结压力的一种方法[J]. 岩土工程界, 2000(8): 45–46.

[22] 姬宏, 宋新江. e~lg(p/kPa)曲线中曲率半径最小值的数值求法[J]. 水利水电技术, 2001, 32(10): 46–47.

[23] 王志亮, 郑明新, 李永池. 求前期固结应力的数学模型研究及应用[J]. 岩土力学, 2005, 26(10): 1587-1590.

[24] 水利部水利水电规划设计总院, 南京水利科学研究院. 土工试验方法标准: GB/T 50123—2019[S]. 北京: 中国计划出版社, 2019.

[25] 刘璋温. 赤池信息量准则 AIC 及其意义[J]. 数学的实践与认识, 1980, 10(3): 64–72.